И.Г. Идрисов
А.Н. Аполонский

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА ПРИ РЕШЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1 Арифметические вычисления

1.1 Стандартная форма записи больших и малых чисел

При решении задач по физике может потребоваться выполнение численных расчетов. Тогда в формулу ответа вместо буквенных обозначений физических величин необходимо подставить их численные значения и затем выполнить вычисления. Числа в физике принято, за редкими исключениями, представлять в виде десятичных дробей. Численные значения многих физических величин чрезвычайно малы, например: размер атома, заряд электрона, постоянная Планка и т.д. В то же время в физике встречаются и очень большие числа: скорость света, расстояния между небесными телами, количество атомов и молекул в телах и т.п. И с большими и с малыми числами выполнять обычные арифметические операции достаточно трудно, если сами числа представлять как в элементарной арифметике. Поэтому используют стандартную форму записи десятичных дробей. Любое число представляют в виде числа с одной значащей цифрой перед запятой, умноженного на число 10 в соответствующей степени, например $6{,}4 \cdot 10^6$. В стандартной форме любую десятичную дробь X можно представить в виде

$$X = a \cdot 10^{n},$$

где $''a''$ десятичная дробь, причем $1 \le a < 10$, n – целое положительное или отрицательное число. Принято числом значащих цифр в $''a''$ характеризовать точность данных или точность численных расчетов. Предположим, например, что расстояние между двумя населенными пунктами S равно 16025 м. Чтобы получить стандартную форму записи S, перенесем запятую (пока ее нет, но мы всегда ее можем поставить в конце целого числа) на одну цифру влево, что равносильно умножению на 10, т.е.

$$S = 16025 \text{ м} = 16025{,}0 \text{ м} = 1602{,}5 \cdot 10 \text{ м}$$

Будем переносить запятую и далее налево, каждый раз, умножая на 10 до тех пор, пока перед запятой не останется одна значащая цифра:

S = $1602{,}5 \cdot 10$ м = $160{,}25 \cdot 10 \cdot 10$ м = $16{,}025 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ м = $1{,}6025 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ м

По определению $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$. Тогда стандартная форма записи S будет следующей

$$S = 1{,}6025\cdot10^4 \text{ м.} \qquad (1)$$

Сомневаясь в такой точности S, оставим две значащие цифры, тогда $S = 1{,}6\cdot10^4$ м.

Предположим, что мы знаем только последний результат, тогда можно считать, что $S = 1{,}6\cdot10^4$ м получено в результате округления. Максимальная возможная, граница S до округления могла быть равной $S_2 = 1{,}65\cdot10^4$ м, а минимальная – $S_1 = 1{,}55\cdot10^4$. Таким образом, в записи $S = 1{,}6\cdot10^4$ м первая цифра надежная, а вот вторая не совсем. Разница между максимальной и минимальной границами $\Delta S = S_2 - S_1$ составляет $\Delta S = (1{,}65\cdot10^4 - 1{,}55\cdot10^4)$ м $= 0{,}1\cdot10^4$ м. Величина $\Delta S/S$ называется относительной ошибкой, выраженная в процентах она равна

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{0{,}1\cdot10^4}{1{,}6\cdot10^4}\cdot100\% \approx 6\%$$

В нашем примере мы оставили две значащие цифры в S. В произвольной стандартной записи

$$X = a\cdot10^{n},$$

если мы оставляем две значащие цифры, то максимальное значение "a" равно 9,9, а минимальное – 1,0. И в этом и в другом случае абсолютная ошибка Δa равна 0,1. Тогда относительная ошибка может меняться в пределах от

$$\frac{0{,}1}{9{,}9}\cdot100\% \approx 1\%,$$

до

$$\frac{0{,}1}{1{,}0}\cdot100\% \approx 10\%.$$

Значит, в общем случае, если мы в стандартной записи оставляем две значащие цифры, то относительная ошибка численного значения не превышает 10% и лежит в пределах от 1 до 10%.

Если мы оставим в записи (1) три значащих цифры и запишем

$$S = 1{,}60\cdot10^4 \text{ м},$$

то тогда можно считать цифры 1 и 6 надежными, а вот 0 не совсем (0 является значащей цифрой, хотя и стоит в конце). Верхней, возможной границей такого значения S, перед округлением, могло быть число $1{,}605 \cdot 10^4$, а нижней – $1{,}595 \cdot 10^4$. Абсолютная ошибка ΔS в таком случае равна

$$\Delta S = 0{,}01 \cdot 10^4 \text{ м},$$

а относительная

$$\frac{\Delta S}{S} \cdot 100\% \approx 0{,}6\%,$$

т.е. уменьшилась в 10 раз по сравнению с записью

$$S = 1{,}6 \cdot 10^4 \text{ м}.$$

Тогда очевидно, что для произвольного числа с тремя значащими цифрами, относительная ошибка может меняться в пределах от 0,1% до 1%. Это хорошая точность указания и данных, и результатов вычислений. Поэтому, безграмотно выписывать после проведенных вычислений все цифры с табло калькулятора. Следует ограничиться, указанием двух–трех значащих цифр, округлив показания калькулятора. Только в том случае, если это специальное тестовое задание, в котором предусмотрено получение "точного" результата вычислений, нужно выписать столько значащих цифр, сколько требуется в соответствии с заданием. Увеличивая количество значащих цифр на одну, мы претендуем на увеличение точности в 10 раз. Но результат вычислений не может быть точнее исходных данных. Обратите внимание на то, что, как правило, численные значения данных большинства задач не содержат больше трех значащих цифр.

Теперь рассмотрим стандартную форму записи малых чисел. Например, толщина металлической пленки d оказалась равной

$$d = 0{,}000025 \text{ м}.$$

Перенесем запятую на одну цифру вправо, что равносильно делению на 10:

$$d = 0{,}000025 \text{ м} = 0{,}00025 \cdot \frac{1}{10} \text{ м}.$$

Будем продолжать эту операцию до тех пор, пока перед запятой не останется одна значащая цифра:

$$d = 0{,}00025 \cdot \frac{1}{10} \text{ м} = 0{,}0025 \cdot \frac{1}{10 \cdot 10} \text{ м} = 0{,}025 \cdot \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} \text{ м} =$$

$$0{,}25 \cdot \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} \text{ м} = 2{,}5 \cdot \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} \text{ м}.$$

По определению

$$\frac{1}{10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10}=\frac{1}{10^5}=10^{-5}$$

и тогда стандартная форма записи численного значения d будет

$$\mathrm{d} = 2{,}5\cdot10^{-5} \text{ м.}$$

Выводы относительно связи между количеством значащих цифр и точностью в случае малых чисел, очевидно, остаются такими же как и для больших чисел.

Итак, алгоритм преобразования десятичных дробей в стандартную форму следующий:

а) если число $X \geq 10$, то переносим запятую налево, считая количество цифр n, на которое мы делаем перенос, до тех пор, пока перед запятой не окажется одна значащая цифра. Результат записываем в виде

$$X = a\cdot10^{\mathrm{n}},$$

оставляя в "a" не более трех значащих цифр, если нет особых указаний.

б) если $X < 1$, то переносим запятую направо, считая количество цифр n, на которое сделан перенос, до тех пор, пока перед запятой не останется одна значащая цифра. Результат записываем в виде

$$X = a\cdot10^{-\mathrm{n}},$$

округляя "a" до трех или двух значащих цифр.

1.2 Действия со степенями

Если численные значения физических величин подставлены в формулу ответа в стандартном виде, то вычисления выполняются сравнительно просто. Сначала в уме выполняются действия со степенями, а затем в уме или на калькуляторе производятся действия с коэффициентами, стоящими перед степенями. Окончательный результат получают перемножением результатов этих двух операций. Например, формула ответа

$$E=\frac{hc}{\lambda},$$

где E – энергия фотона, h – постоянная Планка, c – скорость света и λ – длина волны. Дано: $h = 4{,}14\cdot10^{-15}$ $эВ\cdot c$, $c = 3\cdot10^{8}$ м/с, $\lambda = 3\cdot10^{-7}$ м. Подставляем в формулу ответа численные значения:

$$E=\frac{4{,}14\cdot10^{-15}\cdot3\cdot10^{8}}{3\cdot10^{-7}}\ эВ.$$

Покажем разделение двух этапов вычислений:

$$E = \underbrace{\frac{4{,}14 \cdot 3}{3}}_{\text{второй этап}} \cdot \underbrace{\frac{10^{-15} \cdot 10^{+8}}{10^{-7}}}_{\text{первый этап}} = 4{,}14 \cdot 10^{-15+8+7} = 4{,}14 \cdot 10^{0} = 4{,}14 \text{ эВ}.$$

Большинство ошибок, которые делаются школьниками, происходит на первом этапе. Поэтому напомним основные правила выполнения действий со степенями. По определению:

$\underbrace{10 \cdot 10 \ldots 10}_{\text{n сомножителей}} = 10^{n}$, $\frac{1}{10^{n}} = 10^{-n}$, $10^{0} = 1$.

Основные свойства степеней:

1) $10^{e} \cdot 10^{m} = 10^{e+m}$ ($10^{e} \cdot 10^{-m} = 10^{e-m}$),

2) $\frac{10^{e}}{10^{m}} = 10^{e-m}$ ($\frac{10^{e}}{10^{-m}} = 10^{e+m}$),

3) $(10^{e})^{m} = 10^{em}$ ($(10^{e} \cdot 10^{m})^{k} = 10^{ek} \cdot 10^{mk} = 10^{ek+mk}$),

здесь e, m, k – целые положительные или отрицательные числа. Обычно формула ответа представляет собой алгебраическую дробь, в этом случае показатели степеней, стоящих в числителе, суммируются без изменения их знака, а показатели степеней, стоящих в знаменателе, с изменением знака, например

$$\frac{10^{8} \cdot 10^{-19}}{10^{-23} \cdot 10^{6}} = 10^{8-19+23-6} = 10^{6}.$$

1.3 Извлечение корней

Для многих школьников определенную трудность представляет вычисление корней различной степени, чаще всего в задачах встречаются квадратные и кубические корни, из чисел, записанных в стандартном виде. Предположим, что значение выражения под корнем рассчитано. Как извлечь корень m–ой степени из $X = a \cdot 10^{n}$? Если n > 0, то необходимо выделить из n наибольшее кратное m (в случае n < 0, выделяется наименьшее кратное m). Предположим, оно оказалось равным km, где k – целое число, тогда *X* можно представить в виде

$$X = a \cdot 10^{km+e},$$

где e = n–km.

Проиллюстрируем дальнейшие вычисления

$$\sqrt[m]{X} = \sqrt[m]{a\cdot 10^{km+e}} = \sqrt[m]{a\cdot 10^{km}\cdot 10^{e}} = \sqrt[m]{a\cdot 10^{e}}\cdot\sqrt[m]{10^{km}} =$$
$$= \sqrt[m]{a\cdot 10^{e}}\cdot 10^{k}$$

Здесь мы использовали свойство рациональных показателей

$$\sqrt[m]{10^{km}} = 10^{\frac{km}{m}} = 10^{k}.$$

Оставшийся корень $\sqrt[m]{a\cdot 10^{e}}$ можно вычислить с помощью, например калькулятора. Предположим, требуется вычислить корень квадратный из $6{,}4\cdot 10^{7}$. Тогда

$$\sqrt{6{,}4\cdot 10^{7}} = \sqrt{6{,}4\cdot 10\cdot 10^{6}} = \sqrt{6{,}4\cdot 10}\cdot\sqrt{10^{6}} = \sqrt{64}\cdot 10^{3} =$$
$$= 8\cdot 10^{3}.$$

Разумеется, все эти действия чаще всего делаются в уме.

Или:

$$\sqrt[3]{0{,}8\cdot 10^{13}} = \sqrt[3]{0{,}8\cdot 10^{1}\cdot 10^{12}} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{10^{12}} = 2\cdot 10^{4}.$$

Аналогично поступаем и в случае отрицательных показателей, так

$$\sqrt[4]{6{,}561\cdot 10^{-17}} = \sqrt[4]{6{,}561\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-16}} = \sqrt[4]{6{,}561\cdot 10^{-1}}\cdot\sqrt[4]{10^{-16}} =$$
$$= 0{,}9\cdot 10^{-4} = 9\cdot 10^{-5}.$$

2 Единицы измерения физических величин

2.1 Определение размерности

Определить размерность физической величины – это значит определить, каким образом единица измерения этой физической величины выражается через основные единицы измерения. В школьной физике все вычисления выполняются в международной системе единиц – СИ. В СИ в качестве основных выбраны единица измерения массы – килограмм (кг), длины – метр (м), времени – секунда (с). Этих величин достаточно для определения размерности любой физической величины, имеющей механическую природу. К ним добавлены: ампер (А) – единица измерения силы тока, для определения электромагнитных величин; кельвин (К) – единица измерения температуры, для тепловых величин; кандела (кд) – силы света, для световых величин и наконец моль – количество вещества, для величин в молекулярной физике. Дополнительными единицами измерения являются единицы измерения плоского угла – радиан (рад) или телесного угла – стерадиан (ср).

Все остальные единицы измерения являются производными и могут быть выражены через основные. Некоторые производные единицы измерения имеют специальные названия и сокращенные обозначения, например Ньютон (*Н*) – единица измерения силы, и часто вместе с основными используются для определения размерности производных единиц измерения, например, единица измерения давления Паскаль (Па) равна $\text{Па} = \dfrac{H}{м^2}$.

Выражение единицы измерения любой физической величины через основные возможно с использованием подходящей формулы. Формула содержит буквенные обозначения. Если мы возьмем буквенное обозначение в квадратные скобки, то это означает как раз определение размерности этой величины. Например, масса обозначена через m, тогда [m] = кг.

Для обозначения физических величин, в основном, используются буквы латинского и греческого алфавитов. Смотри таблицу 1 и таблицу 2.

Таблица 1 – Латинский алфавит

Буква	Название	Буква	Название
A a	а	N n	эн
B b	бэ	O o	о
C c	цэ	P p	пэ
D d	дэ	Q q	ку
E e	э	R r	эр
F f	эф	*S S*	эс
G g	жэ	T t	тэ
H h	аш	U u	у
I i	и	V v	вэ
J j	жи	W w	дубль–вэ
K k	ка	X x	икс
L l	эль	Y y	игрек
M m	эм	Z z	зэт

Читать название физических величин, обозначенных буквами латинского и греческого алфавитов, следует в соответствии с их названием в таблице 1 и таблице 2.

Введем буквенные обозначения для остальных (кроме массы) физических величин, единицы измерения которых относятся к основным:

Таблица 2 – Греческий алфавит

Буква	Название	Буква	Название	Буква	Название
Α α	альфа	Ι ι	йота	Ρ ρ	ро
Β β	бэта	Κ κ	каппа	Σ σ	сигма
Γ γ	гамма	Λ λ	ламбда	Τ τ	тау
Δ δ	дельта	Μ μ	мю	Φ φ	фи
Ε ε	эпсилон	Ν ν	ню	Χ χ	хи
Ζ ζ	дзета	Ξ ξ	кси	Υ υ	ипсилон
Η η	эта	Ο ο	омикрон	Ψ ψ	пси
Θ θ	тэта	Π π	пи	Ω ω	омега

l – длины, t – времени, I – силы тока, T – температуры и ν – количества вещества. Единица измерения силы света нам не потребуется. Тогда [l] = м, [t] = с, [I] = А, [T] = К и [ν] = моль. Размерность численных коэффициентов, которые могут попадаться в формулах, а так же размерность тригонометрических, логарифмических и показательных функций равна 1. Говорят, что эти величины безразмерные. Можно полагать, что их размерность выражается через основные единицы измерения в нулевой степени, например: $[\frac{1}{2}] = 1$, $[\pi] = 1$ или $[\sin\alpha] = 1$. Определим размерность силы по формуле. Для этого вспомним те формулы, которые нам позволяют записать силу через физические величины, единицы измерения которых относятся к основным. Это могут быть

$$F = m \cdot a\,,\ a = \frac{V}{\mathrm{t}}\,,\ V = \frac{l}{\mathrm{t}}\,,$$

где *F* – сила, *a* – ускорение, *V* – скорость. Далее в каждой из формул берем буквы в квадратные скобки и затем выполняем обычные алгебраические действия над единицами измерения:

$$[V] = \frac{[l]}{[\mathrm{t}]} = \frac{м}{с}\,,\ [a] = \frac{[V]}{[\mathrm{t}]} = \frac{м}{с \cdot с} = \frac{м}{с^2}\,;$$

и наконец

$$[F] = [m] \cdot [a] = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н \text{ (Ньютон).}$$

Попутно мы определили размерность ускорения и скорости. Определим размерность кинетической энергии E по формуле

$$E = \frac{mV^2}{2}\,.$$

Заметим, что размерность $[V] = \frac{м}{с}$. Тогда

$$[E_k] = [m]\cdot[V]^2 = \frac{кг\cdot м^2}{с^2}$$

(Размерность двойки [2] = 1). Как известно, эта единица измерения называется Джоуль (Дж):

$$\frac{кг\cdot м^2}{с^2} = Дж\,.$$

Рассмотрим более сложный пример, определим размерность сопротивления. Для этого воспользуемся формулами

$$R = \frac{U}{\mathrm{I}},\ U = E\cdot l,\ F = q\cdot E,\ q = \mathrm{I}\cdot \mathrm{t},$$

где *R* – сопротивление, *U* –напряжение, *E* – напряженность электрического поля, *q* – заряд. Вычисления можно проводить последовательно, а можно по формуле для *R*, полученной путем исключения физических величин, единицы измерения которых не относятся к основным. Итак, если выполнять действия последовательно, то

$$[q] = [\mathrm{I}]\cdot[\mathrm{t}] = А\cdot с = Кл \text{ (Кулон)},$$

$$[E] = \left[\frac{F}{q}\right] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{кг\cdot м}{с^2\cdot А\cdot с} = \frac{кг\cdot м}{с^3\cdot А} = \frac{В}{м}\ \left(\frac{вольт}{метр}\right),$$

здесь мы воспользовались тем, что знали, как определить размерность F. Теперь

$$[U] = [E]\cdot[l] = \frac{кг\cdot м^2}{с^3\cdot А} = В \text{ (вольт)}$$

и наконец

$$[R] = \frac{[U]}{[\mathrm{I}]} = \frac{кг\cdot м^2}{с^3\cdot А^2} = \frac{В}{А} = Ом\,.$$

Можно сократить вычисления получив формулу

$$R = \frac{U}{\mathrm{I}} = \frac{E\cdot l}{\mathrm{I}} = \frac{F\cdot l}{q\cdot \mathrm{I}} = \frac{F\cdot l}{\mathrm{I}^2\cdot \mathrm{t}}$$

тогда

$$[R]=\frac{[F]\cdot[l]}{[\mathrm{I}]^2\cdot[\mathrm{t}]}=\frac{кг\cdot м\cdot м}{c^2\cdot A^2\cdot c}=\frac{кг\cdot м^2}{c^3\cdot A^2}=Ом$$

Аналогично поступают, определяя размерность тепловых величин и величин в молекулярной физике. Найдем размерность теплоемкости по формуле

$$Q=c\cdot m\cdot\Delta T\ ,$$

где Q – количество тепла, c – теплоемкость. Тогда

$$c=\frac{Q}{m\cdot\Delta T}\ .$$

Учтем, что $[Q]$ = Дж, а $[\Delta T]=[T]$. Получаем

$$[c]=\frac{[Q]}{[m]\cdot[\Delta T]}=\frac{Дж}{кг\cdot К}=\frac{кг\cdot м^2}{c^2\cdot кг\cdot К}=\frac{м^2}{c^2\cdot К}\ .$$

Или определим размерность числа Авогадро $N_А$ из формулы

$$\nu=\frac{N}{N_A}$$

где N – количество молекул, $[N]=1$. Тогда из формулы

$$[N_A]=\frac{[N]}{[\nu]}=\frac{1}{моль}\ .$$

2.2 Преобразование единиц измерения

Кроме основных и производных единиц измерения существуют кратные и дольные единицы измерения физических величин, а так же есть ряд внесистемных, не относящихся к СИ, единиц измерения, которые широко применяются. Чтобы получить численный ответ в единицах измерения СИ, необходимо перед подстановкой в формулу ответа преобразовать кратные, дольные, и внесистемные единицы измерения в единицы измерения СИ. С другой стороны, в соответствии с требованиями некоторых задач, ответ часто необходимо представить в кратных, дольных или внесистемных единицах измерения, т.е. может потребоваться выполнить обратные преобразования. Алгоритм таких преобразований соответствует обычным алгебраическим преобразованиям, только переменные здесь могут обозначаться не только одной, а двумя или более буквами. Например, нам необходимо объем, выраженный в кубических миллиметрах (мм^3), преобразовать в единицы измерения СИ, т.е. в м^3. Известно, что мм = 10^{-3} м. Тогда объем 2 мм^3 соответствует

$$2\ мм^3 = 2\ (мм)^3 = 2\cdot(10^{-3}\ м)^3 = 2\cdot10^{-9}\ м^3.$$

Вместо мм в выражение 2 мм^3 мы подставили 10^{-3} м в соответствии с равенством мм = 10^{-3} м.

Прежде чем перейти к более сложным примерам, следует напомнить численные значения и наименования приставок к наиболее часто употребляемым кратным и дольным единицам измерения (таблица 3).

Таблица 3 – Приставки к обозначениям единиц

Тера (Т) = 10^{12}	Санти (с) = 10^{-2}
Гига (Г) = 10^9	Милли (м) = 10^{-3}
Мега (М) = 10^6	Микро (мк) = 10^{-6}
Кило (к) = 10^3	Нано (н) = 10^{-9}
Деци (д) = 10^{-1}	Пико (п) = 10^{-12}

Напомним также меры измерения различных величин, имеющие специальное название, и некоторые внесистемные единицы измерения, смотри таблицу 4.

Таблица 4 – Меры различных величин

Масса	1 т (тонна) = 10^3 кг 1 ц (центнер) = 10^2 кг
Длина	1 Å (ангстрем) = 10^{-10} м
Объем	1 л (литр) = 1 дм^3 = 10^{-3} м^3
Время	1 мин (минута) = 60 с 1 ч (час) = 60 мин =3600 с 1 сут (сутки) = 24 ч = 1440 мин = 86400 с 1 год ≈ 365 сут
Энергия	1 эВ (электрон вольт) = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж 1 кал (калория) ≈ 4,2 Дж
Давление	1 атм (атмосфера физическая) = $1{,}013\cdot10^5\ \frac{Н}{м^2}$

В таблице 5 приведены соотношения между единицами измерения массы, длины и времени как для перевода в СИ, так и для перевода из СИ в кратные, дольные или внесистемные единицы измерения.

Таблица 5 – Соотношения между единицами измерения

Масса	т = 10^3 кг, г = 10^{-3} кг, мг = 10^{-6} кг, мкг = 10^{-9} кг,	кг = 10^{-3} т кг = 10^3 г кг = 10^6 мг кг = 10^9 мкг
Длина	км = 10^3 м, дм = 10^{-1} м, см = 10^{-2} м, мм = 10^{-3} м, мкм = 10^{-6} м, нм = 10^{-9} м, Å = 10^{-10} м,	м = 10^{-3} км м = 10 дм м = 10^2 см м = 10^3 мм м = 10^6 мкм м = 10^9 нм м = 10^{10} Å
Время	ч = 3600 с, мин = 60 с, мс = 10^{-3} с, мкс = 10^{-6} с, нс = 10^{-9} с, пс = 10^{-12} с,	с = $\frac{1}{3{,}6\cdot 10^3}$ ч с = $\frac{1}{60}$ мин с = 10^3 мс с = 10^6 мкс с = 10^9 нс с = 10^{12} пс

Итак, вернемся к задаче преобразования кратных, дольных и внесистемных единиц измерения в единицы измерения СИ. Для этого мы можем воспользоваться таблицей 5 и просто произвести замену переменных. Например, концентрация $n = 3\cdot 10^6 \ \frac{1}{см^3}$, выполняем преобразование

$$n = 3\cdot 10^6 \ \frac{1}{(см)^3} = 3\cdot 10^6 \cdot \frac{1}{(10^{-2}\, м)^3} = 3\cdot 10^6 \cdot \frac{1}{10^{-6}\, м^3} = 3\cdot 10^{12} \ \frac{1}{м^3}$$

Рассмотрим пример обратных преобразований. Ответ получен в метрах, а необходимо его представить в ангстремах. Пусть длина волны $\lambda = 5\cdot 10^{-7}$ м, тогда

$$\lambda = 5\cdot 10^{-7}\ (м) = 5\cdot 10^{-7}\cdot (10^{10}\ Å) = 5\cdot 10^3\ Å.$$

Предположим, что плотность определена в мг/мм^3 и необходимо преобразовать эту единицу измерения в СИ, тогда

$$\frac{мг}{мм^3} = \frac{10^{-6}\, кг}{10^{-9}\, м^3} = 10^3\ \frac{кг}{м^3}.$$

3 Геометрия

3.1 Решение прямоугольных треугольников

В не очень сложных задачах по физике требуются элементарные знания по тригонометрии. Достаточно теоремы Пифагора и определения тригонометрических функций острых углов. Для прямоугольного треугольника, смотри рисунок 1, с гипотенузой c, катетами a и b и углом между гипотенузой и катетом b равным α, имеем по определению:

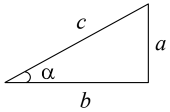


рисунок 1

1) теорема Пифагора – $c^2 = a^2 + b^2$

2) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, 3) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$,

4) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

5) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

6) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Очень часто приходится использовать тригонометрические соотношения для определения компонент векторов. Например, в векторном треугольнике, смотри рисунок 2, длины стрелок равны V_0 и V_a. Определим V_0, через U и угол α. Для этого запишем определение косинуса α

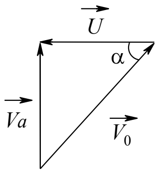


рисунок 2

$$\cos\alpha = \frac{U}{V_0},$$

откуда

$$V_0 = \frac{U}{\cos\alpha}.$$

Как известно, для нахождения одной из сторон по двум другим используют теорему Пифагора, а для нахождения стороны по другой стороне и углу используют определение одной из тригонометрических функций.

3.2 Тригонометрические функции произвольных углов

Определение тригонометрических функций может быть сравнительно просто обобщено на случай произвольных углов. В физике с необходимостью определения тригонометрических функций произвольных углов приходится встречаться в задачах на колебания, волны, переменный ток и т.д.

Рассмотрим начало радиуса вектора $\vec{r}$ единичной длинны в центре системы координат на плоскости. Будем вращать $\vec{r}$ против часовой стрелки взяв за его начальное положение направление, совпадающее с направлением оси OX, смотри рисунок 3. Угол α отсчитывается от оси OX и может принимать любое значение. Конец

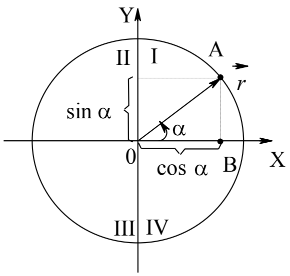


рисунок 3

$\vec{r}$ при вращении описывает окружность единичного радиуса. Так как в треугольнике OAB гипотенуза равна 1, то проекция конца $\vec{r}$ на ось OX равна cos α (OA = 1, $\cos\alpha = \dfrac{OB}{OA}$), а проекция на ось Y равна sin α ($\sin\alpha = \dfrac{AB}{OA}$). После поворота на угол α $\vec{r}$ может остановится в любой четверти окружности, при этом определение синуса и косинуса не изменяется, эти функции α всегда равны и проекции $\vec{r}$ на оси OY и OX. Очевидно, что $\sin\alpha \geq 0$ в I и II четвертях окружности и $\sin\alpha \leq 0$ в III и IV четвертях окружности. Что касается косинуса, то $\cos\alpha \geq 0$ в I и IV четвертях и $\cos\alpha \leq 0$ во II и III четвертях. Если обозначить острый угол между конечным положением

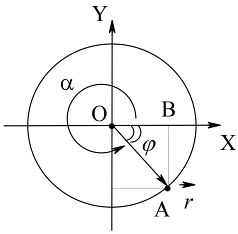


рисунок 4

$\vec{r}$ и осью OX через φ, то тригонометрические функции произвольного угла α выражаются через функции острого угла φ. Например, определим синус и косинус $\alpha = \dfrac{5}{3}\pi$. После поворота на этот угол $\vec{r}$ останавливается в IV четверти, смотри рисунок 4. Очевидно, что угол φ равен $\varphi = 2\pi - \alpha = 2\pi - \dfrac{5}{3}\pi = \dfrac{1}{3}\pi$.

Синус и косинус определяются через проекции $\vec{r}$ но оси OY и OX. Их так же можно определить из Δ OAB через угол φ. С учетом знака проекции в IV четверти получаем

$$\sin\alpha = \sin\frac{5}{3}\pi = -\sin\varphi = -\sin\frac{1}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

и

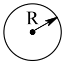
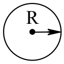
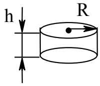
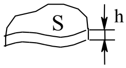
$$\cos\alpha = \cos\varphi = \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}.$$

С учетом сказанного, единственное, что необходимо помнить, это тригонометрические функции некоторых острых углов: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, – которые наиболее часто встречаются в задачах. Косинусы могут быть определены из тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, а функции углов $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ определяются через проекции $\vec{r}$. Очевидно, что если $\alpha = 0$, то $\vec{r}$ совпадает с осью OX и его проекция на ось OX равна 1, следовательно coS 0 = 1 и Sin 0 = 0, так же очевидно, что если $\vec{r}$ совпадает с OY, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то Sin $\frac{\pi}{2}$ = 1 и coS $\frac{\pi}{2}$ = 0. Тригонометрические функции произвольных отрицательных углов определяются аналогично. Отрицательное значение угла соответствует повороту $\vec{r}$ по часовой стрелке на заданный угол.

3.3 Объемы и поверхности тел

Исключая тривиальные задачи, в которых просто требуется знание формулы, определяющей объем или площадь поверхности тела, имеющего несложную геометрическую форму, можно обнаружить, что существует класс задач, в которых используются представления о сохранении полного объема или общей поверхности тела. Так, если тело или система тел в результате изменения своей формы преобразуются в другие тела без изменения своей плотности, то очевидно, что их суммарный объем до преобразования равен суммарному объему после преобразования. В таблице 6 приведены формулы для определения площади поверхности и объема тел, которые чаще всего встречаются в задачах по физике.

Таблица 6 – Объемы и поверхности некоторых тел

Тело	Объем	Площадь поверхности
 круг	–	πR^2
 шар	$\frac{4}{3}\pi R^3$	$4\pi R^2$
 цилиндр	$\pi R^2 \cdot h$	$2\pi R^2 + 2\pi R^2 \cdot h$
нечто плоское и тонкое 	$S \cdot h$	–

В качестве примера рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 1. Цилиндрический сосуд высотой 10 см и радиусом 5 см заполнен дождевой водой. Считая капли дождя шариками радиусом примерно 1 мм, оцените количество капель, которое потребовалось для заполнения сосуда.

Решение. Объем сосуда V, имеющего цилиндрическую форму равен

$$V = \pi R^2 \cdot h,$$

где R – радиус сосуда, h – его высота. С другой стороны, поскольку его полностью заполнили капли,

$$V = N \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

где N – количество капель, r – радиус одной капли, $\frac{4}{3}\pi r^3$ – объем одной капли. Приравнивая объемы получаем

$$\pi R^2 \cdot h = N \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

откуда

$$N = \frac{3R^2 \cdot h}{4r^3} = \frac{3 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot (10^{-3})^3} = 2 \cdot 10^5$$

4 Векторы

Физические величины, которые характеризуются только своим численным значением и единицей измерения, имеется ввиду с точки зрения определения их количественных характеристик, называются скалярами, например: плотность ρ, масса m, объем V, путь L, время t – скаляры. В тексте обозначения скалярных величин никак особо не выделяются. Скалярные величины не обязательно принимают только положительные значения. Среди них имеется много алгебраических переменных, таких, которые могут иметь как положительное, так и отрицательное значение, например: U – потенциальная энергия, q – заряд, координаты тела – x, y, z и др. Выполняя вычисления с такими переменными необходимо помнить об этом. Математические операции, выполняемые со скалярами, полностью соответствуют правилам обычной алгебры.

Но среди физических величин существуют и более сложные в математическом отношении объекты, например векторы. Векторные величины кроме единицы измерения и своего численного значения, модуля, всегда положительного, характеризуются еще и направлением в пространстве. В тексте обозначения векторов выделяются жирным шрифтом, например сила **F**, или содержат стрелку над буквой, например так, как обозначена скорость $\vec{V}$, иногда стрелка упрощается до простой черты над буквой, например $\bar{a}$ – ускорение. Кроме перечисленных, к векторным величинам относятся перемещение – $\vec{S}$, импульс – $\vec{p}$, момент сил – $\vec{M}$ и многие другие. Существует специальный раздел в математике – векторная алгебра, который определяет правила выполнения математических операций над векторами. В векторной алгебре сумма двух векторов, например **3** + **4**, может принимать любые значения от **7** до **1**. Т.е. может быть так, что

3 + **4** = **1**.

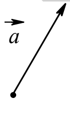
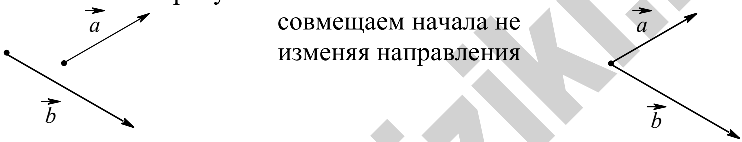
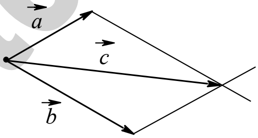


рисунок 5

Рассмотрим основные правила работы с векторами. На рисунках векторы обозначаются в виде стрелки, определенным образом ориентированной в пространстве, например так, как показано на рисунке 5. Можно считать, что пространством является непосредственно лист бумаги. Если подходить строго, то модуль вектора – это длина стрелки, поэтому рисовать векторы необходимо с учетом выбранного масштаба. Модуль вектора $\left|\vec{a}\right|$ обозначается как скалярная величина, просто a, и он всегда положителен $\left|\vec{a}\right| = a \geq 0$. Вектор можно умножать на скалярный множитель. Например, можно рассматривать величину $\vec{a}\cdot\frac{t^2}{2}$, это опять вектор, имеющий то же направление что и $\vec{a}$, но в $\frac{t^2}{2}$ раз длиннее. Векторные величины одинаковой размерности, к примеру, две силы, можно складывать. Возможно, вы знаете, что две векторные величины складываются по правилу параллелограмма или по правилу треугольника. Рассмотрим сложение двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу параллелограмма. Для сложения их начала путем параллельного переноса совмещаются, как это показано на рисунке



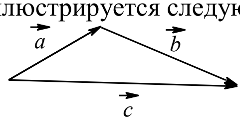
Затем из конца вектора $\vec{a}$ проводится прямая линия параллельная $\vec{b}$, а из конца вектора $\vec{b}$ прямая линия, параллельная вектору $\vec{a}$. Диагональ в образованном прямыми линиями и векторами параллелограмме является модулем суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Эта операция записывается так



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}\ .$$

Понятно, что сумма векторов опять же вектор и его направление соответствует приведенному на рисунке

Правило треугольника иллюстрируется следующим рисунком



Для сложения векторов по этому правилу необходимо совместить, не изменяя направления векторов, начало одного вектора с концом другого и провести направленный отрезок от начала $\vec{a}$ как на рисунке к концу $\vec{b}$. Из построения очевидно, что оба способа сложения векторов приводят к одному и тому же результату. Вы уже поняли, что с векторами мы обращаемся как с "копьями" собирая в пространстве из них разные фигуры. Если складывается много векторов, то правило треугольника является предпочтительным. На следующем рисунке показано сложение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{f}$. При сложении мы складываем вектора попарно пока не получим всю сумму, т.е. операцию

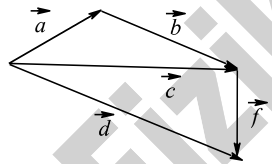
$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{f}$$

разбиваем на две: сначала определяем

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b},$$

а потом и

$$\vec{d} = \vec{c} + \vec{f}.$$



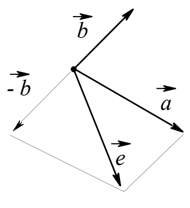
Промежуточные операции можно пропускать просто соединяя начало первого с концом последнего вектора. Векторы можно вычитать друг из друга. Что означает, например, разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}\ ?$$

Это та же сумма

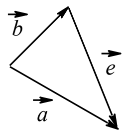
$$\vec{e} = \vec{a} + (-\vec{b}),$$

где вектор $-\vec{b}$ имеет тот же модуль, что и вектор $\vec{b}$, но направлен в противоположную сторону. Т.е. указанную операцию можно выполнить, например, так



,

где вычитание выполнено с использованием правила параллелограмма. Гораздо удобнее использовать правило треугольника:



Очевидно, что в векторных уравнениях можно переносить вектор из одной половины уравнения в другую через знак равенства, при этом после переноса знак вектора (направление) должен измениться на противоположный. Последний пример тому иллюстрация, у нас было

$$\vec{e} = \vec{a} - \vec{b},$$

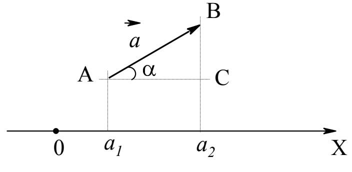
перенесем вектор $\vec{b}$ из правой части уравнения в левую, получим:

$$\vec{e} + \vec{b} = \vec{a}.$$

Действительно это уравнение соответствует тому же рисунку. Кроме операции умножение на скаляр, сложения и вычитания векторов в векторной алгебре определены еще и скалярное и векторное произведение векторов. Но мы оставим определение этих операций до тех разделов физики, где они потребуются непосредственно.

Решение векторных уравнений сводится к решению более или менее сложной геометрической задачи. Если векторов в уравнениях больше трех и они не лежат на одной прямой, то такая задача всегда сложная. Геометрическое решение является простым, когда вектора образуют прямоугольный треугольник. В остальных случаях желательно использовать метод, с помощью которого любое векторное уравнение сводится к нескольким обычным алгебраическим уравнениям.

Чтобы рассмотреть суть этого метода, введем понятие проекции вектора на выбранное направление, как правило, этим направлением является одна из координатных осей. Итак, есть вектор $\vec{a}$ и ось OX



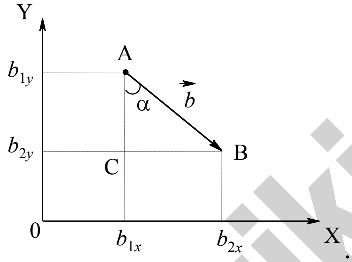
На рисунке угол α соответствует углу между вектором $\vec{a}$ и осью OX, a_1 – координата начала вектора, а a_2 – координата конца. Проекция вектора $\vec{a}$ на направление OX обозначается как a_x и равна

$$a_x = a_2 - a_1,$$

т.е. проекция вектора на выбранное направление равна разности проекций конца вектора и начала вектора. Когда начало вектора расположено в начале системы координат, тогда $a_1 = 0$ и проекция вектора определяется только через a_2. a_x величина алгебраическая: $a_x > 0$, если $a_2 > a_1$, и $a_x < 0$, если $a_2 < a_1$. Из треугольника ABC следует, что

$$a_x = a \cdot \cos\alpha,$$

где $a = |\vec{a}| = AB$, $|a_x| = AC$. На следующем рисунке показано, каким образом определяются проекции вектора $\vec{b}$ на оси OX и OY

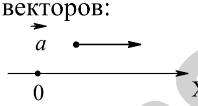


.

По определению из треугольника ABC, с учетом знака проекции, получаем:

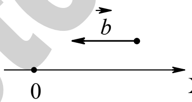
$$b_x = b_{2x} - b_{1x} = b \cdot \sin\alpha,$$
$$b_y = b_{2y} - b_{1y} = -b \cdot \cos\alpha,$$
$$b_y < 0, \text{ т.к. } b_{2y} < b_{1y}.$$

Приведем еще несколько примеров определения проекции векторов:



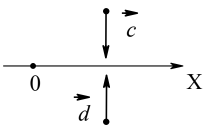
,

$a_x = a$



,

$b_x = -b$



$c_x = 0$
$d_x = 0$.

Таким образом, проекцию вектора на любое направление мы будем определять через модуль этого вектора и угол, который этот вектор составляет с выбранным направлением. На плоскости достаточно указать угол между вектором и одной из осей.

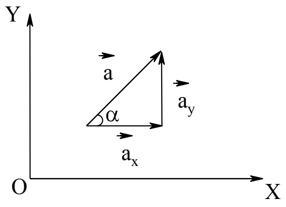


рисунок 6

Для быстрого определения проекций векторов весьма полезно представление о компонентах вектора. Очевидно, что любой вектор можно представить в виде суммы двух или более произвольных векторов. На плоскости удобно представлять любой вектор $\vec{a}$ в виде суммы вектора $\vec{a}_x$, направленного вдоль оси OX, и вектора

$\vec{a}_y$, направленного вдоль оси OY. Смотри рисунок 6. Такая процедура называется разложением вектора на составляющие вдоль осей OX и OY.

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y .$$

Из теоремы Пифагора всегда следует, что

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2.$$

Длины векторов $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ определяют соответствующие проекции вектора $\vec{a}$ на оси OX и OY. Если известен один из углов в векторном треугольнике

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y ,$$

то проекции вектора $\vec{a}$ легко определяются через a. Знак проекции зависит от направления векторов $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$, если направление компоненты вектора совпадает с положительным направлением оси, то проекция положительная, в другом случае она отрицательная, т.к. у компонент вектора только два возможных направления: по оси и против. В соответствии с рисунком 6 $a_x = a \cdot \cos\alpha$ и $a_y = a \cdot \sin\alpha$. В трехмерном пространстве вектор $\vec{a}$ разлагается на компоненты $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ и $\vec{a}_z$ вдоль осей OX, OY и OZ

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z ,$$

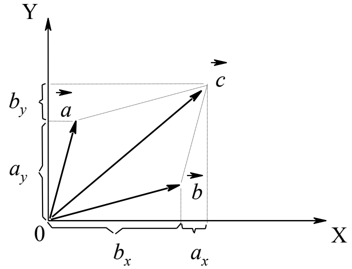
аналог теоремы Пифагора в трехмерном пространстве позволяет определить длину вектора через величину его проекций:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Вернемся к векторным уравнениям и зададимся вопросом, как соотносятся компоненты векторов $\vec{c}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если справедливо уравнение

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} .$$

Из рисунка, приведенного ниже, следует, что



$$c_x = a_x + b_x,$$
$$c_y = a_y + b_y.$$

т.е векторное уравнение разбилось на два обычных алгебраических уравнения! В трехмерном пространстве к двум предыдущим уравнениям добавилось бы уравнение, связывающее проекции векторов на ось OZ

$$c_z = a_z + b_z.$$

Получается, что в общем случае любой вектор $\vec{a}$ полностью определяется тройкой чисел a_x, a_y, a_z. И при этом проекция суммы векторов равна сумме проекций векторов, и это утверждение справедливо для любого направления. Очевидно, что полученный результат не зависит от количества слагаемых в векторном уравнении и любое векторное уравнение записанное, например в форме

$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + ... + \vec{f} \ ,$$

равносильно системе алгебраических уравнений

$$e_x = a_x + b_x + \ldots + f_x,$$
$$e_y = a_y + b_y + \ldots + f_y,$$
$$e_z = a_z + b_z + \ldots + f_z.$$

В обычной школьной физике практически не встречается трехмерных задач, поэтому записывая то или иное векторное уравнение в проекциях на оси, мы получаем для каждого векторного уравнения систему из максимум двух алгебраических уравнений, которую и решаем.

4.1 Кинематические уравнения движения

Многие физические законы ясно и просто записываются в векторном виде. Например, кинематические уравнения движения материальной точки, движущейся с постоянным ускорением, записываются в виде:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 \cdot \mathrm{t} + \vec{a} \cdot \frac{\mathrm{t}^2}{2}, \qquad (2)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{a} \cdot \mathrm{t},$$

где $\vec{r}$ – радиус вектор, определяющий положение тела в пространстве. Начало вектора $\vec{r}$ всегда расположено в начале координат, а конец вектора $\vec{r}$ находится в той точке, в которой находится тело в данный момент времени t, смотри рисунок 7. $\vec{r}_0$ – вектор, определяющий положение тела в начальный момент времени, когда t=0. Т.е. это положение вектора $\vec{r}$ при t=0, $\vec{V}_0$ – начальная скорость тела, $\vec{V}$ – скорость тела в произвольный момент времени, $\vec{a}$ – ускорение, $\vec{a}$=const. Запись $\vec{a}$=const означает, что вектор $\vec{a}$ с течением времени не изменяется ни по модулю, ни по направлению. Проекции вектора $\vec{r}$ на оси OX и OY обозначаются как x и y, проекции вектора $\vec{r}_0$ – как x_0 и y_0. Кинематические уравнения движения (1) в проекциях на оси OX и OY записываются следующим образом:

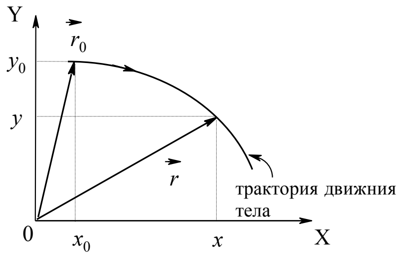


рисунок 7

OX

$$x = x_0 + V_{ox} \cdot \mathrm{t} + \frac{a_x \cdot \mathrm{t}^2}{2},$$

$$V_x = V_{ox} + a_x \cdot \mathrm{t}; \qquad (3)$$

OY

$$y = y_0 + V_{oy} \cdot \mathrm{t} + \frac{a_y \cdot \mathrm{t}^2}{2},$$

$$V_y = V_{oy} + a_y \cdot \mathrm{t}.$$

В таком виде уравнения малопригодны для решения задач. Необходимо научиться записывать уравнения (3) применительно к конкретной задаче выражая все проекции векторов, стоящие в правых частях в их явном виде через модули векторов и углы.

Как это делается, покажем на следующей задаче.

Задача 2. Движение тела происходит с $\vec{a}$ = const. Направление векторов $\vec{V}_0$, $\vec{a}$ и начальное положение тела соответствуют обозначениям рисунка 8. Запишите кинематические уравнения движения.

Решение. Определяем проекции векторов, стоящих в правых частях (3). Поскольку движение происходит вдоль оси ОХ, то остается только два уравнения. Итак, в соответствии с рисунком 8: $V_{ox} = V_0$, $a_x = -a$. Делаем подстановки в (3) и получаем искомые уравнения:

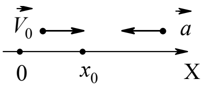


рисунок 8

$$x = x_0 + V_0 \cdot \mathrm{t} - \frac{a \cdot \mathrm{t}^2}{2},$$

$$V_x = V_0 - a \cdot \mathrm{t}.$$

Рассмотрим более сложный пример, соответствующий движению тела в поле тяжести с $\vec{a} = \vec{g}$ =const, где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения. Тогда в уравнениях (2) и (3) вместо a, необходимо вписать g. Мы не будем переписывать уравнения, полагая, что и так это понятно.

Задача 3. Запишите кинематические уравнения движения тела, брошенного со склона горы под углом β к направлению склона, поверхность которого образует угол α с горизонтом. Величина начальной скорости равна V_0. Ускорение свободного падения g.

Решение. Выберем направление оси ОХ вдоль склона, а оси Y перпендикулярно ему смотри рисунок 9. Разложим вектора $\vec{V}_0$ и $\vec{g}$ на составляющие вдоль осей ОХ и ОY. Из векторных треугольников

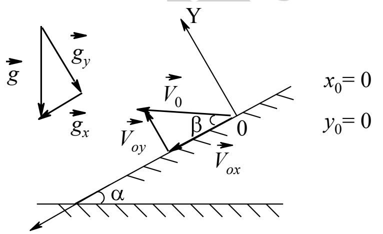


рисунок 9

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_{ox} + \vec{V}_{oy}$$

и

$$\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_y,$$

определяем проекции:

$V_{ox} = V_0 \cdot \cos\beta$, $V_{oy} = V_0 \cdot \sin\beta$, $g_x = g \cdot \sin\alpha$, $g_y = -g \cdot \cos\alpha$. Окончательно записываем кинематические уравнения:

OX

$$x = V_0 \cdot \cos\beta \cdot \mathrm{t} + g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{\mathrm{t}^2}{2},$$

$$V_x = V_0 \cdot \cos\beta + g \cdot \sin\alpha \cdot \mathrm{t},$$

OY

$$y = V_0 \cdot \sin\beta \cdot \mathrm{t} - g \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\mathrm{t}^2}{2},$$

$$V_y = V_0 \cdot \sin\beta - g \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{t}.$$

4.2 Второй закон Ньютона

Другим примером широко использующегося в физике векторного уравнения является второй закон Ньютона. Обычно его записывают следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}, \qquad (4)$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n}$ – знак суммы, обозначает суммирование по индексу i величины которая стоит после знака суммы. При этом i меняется от 1 до n пробегая все целые значения, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$,

где F_i – различные силы, действующие на тело, m – масса тела, a – его ускорение.

Уравнение (4), записанное в проекциях на оси OX и OY, имеет вид

$$\text{OX: } F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \mathrm{m}a_x, \qquad (5)$$
$$\text{OY: } F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \mathrm{m}a_y.$$

Силы, например в механике, обычно обозначаются следующими буквами: $\vec{T}$ – натяжение нитей, $\vec{N}$ – нормальная реакция опоры, $\vec{F}_{тр}$ – сила трения, $\mathrm{m}\vec{g}$ – сила тяжести и $\vec{F}$ – внешняя сила. Под $\vec{F}_i$ понимаются какие то из перечисленных сил. Запишем уравнение (5) применительно к конкретной задаче, выражая проекции векторов и в левой и в правой частях уравнения через модули векторов и углы.

Задача 4. На рисунке 10 обозначены направления всех векторов, входящих в уравнение (4). Запишите второй закон Ньютона в проекциях на оси OX и OY.

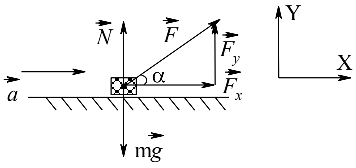


рисунок 10

Решение. В соответствии с рисунком на тело действуют три силы $\vec{F}$, $\vec{N}$ и $m\vec{g}$. Суммируем их и записываем второй закон Ньютона в векторном виде:

$$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}\,. \qquad (6)$$

Разлагаем вектор $\vec{F}$ на компоненты и определяем проекции векторов. (Разложение векторов на компоненты можно делать в уме не загромождая рисунок дополнительными обозначениями). Итак: $F_x = F\cos\alpha$, $F_y = F\sin\alpha$, $N_x = 0$, $N_y = N$, $mg_x = 0$, $mg_y = -mg$, $ma_x = ma$, $ma_y = 0$. Записываем уравнение (6) в проекциях по оси OX и OY

OX: $F\sin\alpha + N - mg = 0$,

OY: $F\cos\alpha = ma$.

Рассмотрим задачу, в которой одновременно движутся два тела.

Задача 5. Запишите второй закон Ньютона в проекциях на оси OX и OY для двух тел в соответствии с обозначениями и направлениями сил и ускорений на рисунке 11.

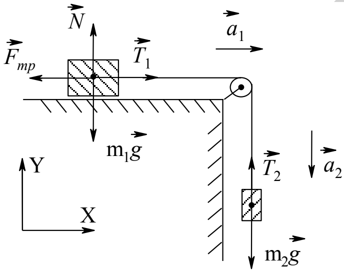


рисунок 11

Решение. Все действующие на тела силы указаны на рисунке 11. Просто суммируем их записывая уравнение (4) отдельно для каждого тела. Получаем:

$$\vec{F}_{тр} + \vec{N} + \vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1\,, \quad (7)$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2\,.$$

Определяем проекции каждой силы и ускорений по оси OX и OY и записываем уравнения (7) для проекций:

для первого тела: OX: $-F_{тр} + T_1 = m_1a_1$

OY: $N - m_1g = 0$

и для второго тела: OY: $m_2g - T_2 = -m_2a_2$

5 Получение формул ответов. Алгебраические преобразования

После того как, решая задачу по физике, мы записали законы физики в виде одного или нескольких алгебраических уравнений, нам необходимо решить полученные уравнения относительно неизвестных величин. В физике принято решать задачу в общем виде до получения формулы ответа, в которую входят только буквенные обозначения известных величин. Формула ответа представляет собой математическую модель физического явления. По ней можно определить размерность определяемой величины и таким образом проверить правильность решения. Формула ответа позволяет совершить предельные переходы или рассмотреть очевидные решения, когда ответ нам может подсказать наша интуиция или опыт, и опять же можно проверить, верна ли эта формула. Многие школьники, решая задачи по физике, делают так называемые последовательные вычисления. Совершенно очевидно, что при этом как бы стирается все информация, о которой говорилось выше. Возьмем самый простой пример. Получено, что ускорение тела на наклонной плоскости равно

$$a = g \cdot (\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha),$$

где g – ускорение свободного падения, α – угол между наклонной плоскостью и горизонтом и μ – коэффициент трения. Сделаем элементарный анализ этой формулы:

1) Проверяем размерность [a] = [g], действительно [a] = м/с^2 и [g] = м/с^2.

2) В отсутствии силы трения (μ = 0), на горизонтальной поверхности (α = 0), тело должно покоится или двигаться с постоянной скоростью. Из формулы следует, что в этом случае a = 0. Все правильно.

3) Но данная формула позволяет получить нам и определенную новую информацию. Так можно обратить внимание на то, что a = 0, если $\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha = 0$ нулевому ускорению соответствует движение с постоянной скоростью или состояние покоя. Значит, если $\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha = 0$, т.е. если tgα = μ, то тело на наклонной плоскости должно покоиться или соскальзывать с постоянной скоростью. Это уже интересно и можно дальше продолжить исследование движения тела на наклонной плоскости.

Получение формул ответов связано с более или менее сложными алгебраическими преобразованиями.

5.1 Уравнения с одним неизвестным

При решении задач по физике уравнения появляются при использовании законов, правил, определений или непосредственно выведенных применительно к той или иной задаче формул. В школьной физике большинство уравнений могут быть сведены к уравнениям, которые содержат неизвестные величины в первой степени. Достаточно редко встречаются уравнения второй степени и крайне редко третьей. Другое дело, что записанные в своем первоначальном виде, уравнения часто являются довольно громоздкими и требуется большой опыт для того, чтобы выразить из них неизвестные величины.

К сожалению, именно неумение выполнить тождественные преобразования уравнений, очень часто не позволяет школьникам правильно решить задачу и получить удовольствие от изучения физики. Из ошибок, которые наиболее часто делаются школьниками, следует особо сказать о тех, которые связаны с неумением производить операции с алгебраическими дробями. Производя преобразования одной из половин уравнения следует помнить, что если *a*, *b*, *c* и *d* произвольные алгебраические многочлены, то

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}} = \frac{bd}{ad+bc}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc},$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}.$$

В "многоэтажных" выражениях, когда одна дробь делится на другую, необходимо различать основную дробь и дополнительные, знак равенства следует ставить точно напротив основной дроби.

При решении уравнения допускается выполнять только тождественные преобразования, т.е. такие, которые не приводят к изменению решений первоначального уравнения. Алгебра тождественных преобразований изучается в школе на достаточно высоком уровне на уроках математики и мы просто порешаем задачи на материале физики, чтобы можно было понять особенности использования алгебры в физике.

Задача 6. Решите уравнение, считая неизвестной величину m.

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Решение. Подходим к решению задачи формально. Как получено это уравнение и что за переменные входят в него, на данном этапе не важно. Наша цель путем тождественных преобразований привести это уравнение к виду

$$m = \ldots .$$

Чтобы избавится от корня, возводим обе половины исходного уравнения в квадрат, получаем:

$$\nu^2 = \frac{k}{4\pi^2 \mathrm{m}}$$

Используем свойство пропорций для которых, если

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } ad = bc,$$

здесь *a*, *b*, *c*, *d* произвольные алгебраические многочлены.
Для нашего уравнения это можно представить себе так:

$$\frac{\nu^2}{1} = \frac{k}{4\pi^2 m}$$

a = ν^2, *b* = 1, *c* = k, *d* = $4\pi^2$m

Тогда

$$4\pi^2 m\nu^2 = k.$$

Теперь делим правую и левую части уравнения на $4\pi^2\nu^2$, чтобы получить явное выражение для m

$$m = \frac{k}{4\pi^2 \nu^2}.$$

Это и есть искомая формула ответа. Не обязательно было выполнять преобразования так, как это было продемонстрировано. Результат не зависит от того, как делались выкладки.

Задача 7. Решите уравнение относительно V_2.

$$V_{cp} = \frac{S}{\frac{S}{3V_1} + \frac{2S}{3V_2}}$$

Решение. Выносим в знаменателе множитель *S* за скобку

$$V_{cp} = \frac{S}{S \cdot \left(\frac{1}{3V_1} + \frac{2}{3V_2} \right)},$$

и сокращаем *S* в числителе и знаменателе правой части уравнения, получаем

$$V_{cp} = \frac{1}{\frac{1}{3V_1} + \frac{2}{3V_2}}.$$

"Переворачиваем" левую и правую половины уравнения т.е. возводим в степень –1

$$\left(V_{cp}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\frac{1}{3V_1} + \frac{2}{3V_2}}\right)^{-1}.$$

Другими словами, берем обратные величины от левой и правой частей уравнения и приходим к уравнению:

$$\frac{1}{V_{cp}} = \frac{1}{3V_1} + \frac{2}{3V_2}.$$

Переносим $\frac{1}{3V_1}$ в другую часть уравнения:

$$\frac{1}{V_{cp}} - \frac{1}{3V_1} = \frac{2}{3V_2}.$$

Складываем дроби в левой части уравнения

$$\frac{3V_1 - V_{cp}}{V_{cp} \cdot 3V_1} = \frac{2}{3V_2}.$$

Используя свойство алгебраических пропорций

$$3V_2 \cdot (3V_1 - V_{cp}) = 2 \cdot 3 \cdot V_{cp} \cdot V_1,$$

и наконец делим обе части на $3(3V_1 - V_{cp})$:

$$V_2 = \frac{2V_{cp} \cdot V_1}{3V_1 - V_{cp}}.$$

Делая выкладки, можно выполнять практически любые математические операции одновременно над левой и правой частями уравнения. Если преобразуется только одна половина уравнения, то эти преобразования должны быть тождественными. Кроме упомянутых выше действий над "многоэтажными" выражениями, к таким преобразованиям относятся: приведение подобных членов, вынесение общего множителя за скобку, правила выполнения действий над иррациональными, степенными, логарифмическими и тригонометрическими выражениями.

5.2 Нахождение отношения двух величин

Во многих задачах, на первый взгляд, слишком много неизвестных. Кажется, что такая задача не может быть решена. Но если в задаче стоит вопрос о том, во сколько раз одна величина больше или меньше другой, то, скорее всего, все вспомогательные величины, которые мы введем для того, чтобы было проще рассуждать, на заключительном этапе, когда мы будем расчитывать отношение, сократятся.

Задача 7. Во сколько раз увеличится кинетическая энергия тела, если его скорость увеличится в два раза.

Решение. Кинетическая энергия тела определяется по формуле:

$$E = \frac{mV^2}{2},$$

где m – масса тела, V – скорость тела. Первоначальная энергия тела равна

$$E_1 = \frac{mV_1^{\,2}}{2}.$$

Затем она стала равной

$$E_2 = \frac{mV_2^{\,2}}{2}.$$

По условию задачи $V_2 = 2V_1$. Находим отношение E_2 к E_1

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\frac{mV_2^{\,2}}{2}}{\frac{mV_1^{\,2}}{2}} = \frac{V_2^{\,2}}{V_1^{\,2}} = \frac{(2V_1)^2}{V_1^{\,2}} = 4.$$

Таким образом, энергия увеличится в 4 раза.

Кстати, несмотря на простоту задачи, именно здесь, при делении одной энергии на другую, многие делают ошибки.

(Не ошибайтесь! $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$).

Задача 8. Во сколько раз изменится сила притяжения тела к Земле, если его удалить от поверхности Земли на расстояние равное радиусу Земли.

Решение. Сила притяжения F, действующая между телом и Землей, определяется законом Всемирного тяготения.

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2},$$

где m – масса тела, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, r – расстояние между центром Земли и телом. На поверхности Земли сила притяжения тела Землей равна

$$F_1 = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2},$$

где R – радиус Земли. При удалении от поверхности на расстояние равное радиусу расстояние r между телом и центром Земли станет равным $2R$, а сила

$$F_2 = G \cdot \frac{m \cdot M}{(2R)^2}.$$

Понятно, что $F_1 > F_2$, поэтому ищем отношение $\dfrac{F_1}{F_2}$, оно равно

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}}{G \cdot \frac{m \cdot M}{(2R)^2}} = 4.$$

Сила уменьшится в 4 раза.

5.3 Решение систем уравнений

Если после перевода условий задачи в математическую форму нами получена система уравнений, то прежде всего следует убедиться в том, что количество уравнений совпадает с количеством неизвестных. Тогда задача может быть решена. Конечно, все уравнения должны быть независимыми, т.е. никакое из них не должно путем преобразований сводиться к какому–нибудь из остальных.

Существует два метода решений систем уравнений. Первый метод – это метод подстановки. В соответствии с этим методом любая неизвестная величина, входящая в одно из уравнений, выражается в явном виде, так как делается при решении уравнения с одним неизвестным. Затем полученное выражение для этой неизвестной величины подставляется вместо нее во все оставшиеся уравнения. Уравнение, из которого находилась неизвестная величина, отбрасывается и решается система, содержащая на одно уравнение и на одну неизвестную величину меньше. Этот процесс повторяется пока не останется одно уравнение с одним неизвестным. Метод подстановки часто приводит к громоздким выражениям. Большое количество выкладок является источником ошибок.

Второй метод заключается в том, что уравнения, входящие в систему складываются, вычитаются, умножаются или делятся друг на друга. Цель этих операций заключается в сокращении неизвестных величин после выполнения той или иной операции. Например, если мы имеем систему, состоящую из двух уравнений:

$$\begin{cases} f = g, \\ \psi = \varphi, \end{cases}$$

где f, g, ψ, φ – алгебраические многочлены, содержащие неизвестные величины, то в результате выполнения вышеуказанных операций можно перейти к одному из следующих уравнений:

а) сложение уравнений $f + \psi = g + \varphi$,

б) вычитание уравнений $f - \psi = g - \varphi$,

в) деление одного уравнения на другое $\dfrac{f}{\psi} = \dfrac{g}{\varphi}$,

г) умножение уравнений $f \cdot \psi = g \cdot \varphi$.

Т.е. над правыми и над левыми частями уравнений производятся одинаковые действия. Данный метод решения систем уравнений более эффективен, однако для его использования требуется сообразительность и опыт.

Задача 8. В приведенной системе уравнений неизвестными величинами являются V_1 и V_2. Решить систему относительно V_1.

$$\begin{cases} V = V_1 + V_2 \\ \rho_0 V_2 g = \rho V g \end{cases}$$

Решение. Решаем систему методом подстановки. Из первого уравнения находим V_2

$$V_2 = V - V_1$$

Вместо V_2 во второе уравнение подставляем $V - V_1$, получаем

$$\rho_0 \cdot (V - V_1) \cdot g = \rho V g \ .$$

Решаем полученное уравнение относительно V_1. Раскрываем скобки в правой части и сокращаем g:

$$\rho_0 V - \rho_0 V_1 = \rho V \ .$$

Из последнего уравнения находим V_1

$$V_1 = V \cdot \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho_0} = V \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

Задача 9. В приведенной системе уравнений неизвестными величинами являются V и U. Решить систему относительно V.

$$\begin{cases} \dfrac{L}{V+U} = t_1, \\ \dfrac{L}{V-U} = t_2. \end{cases}$$

Решение. В каждом из уравнений переходим к обратным величинам, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{V+U}{L} = \dfrac{1}{t_1}, \\ \dfrac{V-U}{L} = \dfrac{1}{t_2}. \end{cases}$$

Переписываем систему выполняя почленное деление в левых частях уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{V}{L} + \dfrac{U}{L} = \dfrac{1}{t_1}, \\ \dfrac{V}{L} - \dfrac{U}{L} = \dfrac{1}{t_2}. \end{cases}$$

Складываем первое уравнение со вторым

$$\frac{V}{L}+\frac{U}{L}+\left(\frac{V}{L}-\frac{U}{L}\right)=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}.$$

Как видно, одно неизвестное *U* у нас сокращается, получаем:

$$\frac{2V}{L}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}.$$

Из последнего уравнения находим *V*, упрощая ответ:

$$V=\frac{L(t_1+t_2)}{2t_1t_2}.$$

Задача 10. Неизвестными величинами в приведенной системе являются *T* и *q*. Найти *q*.

$$\begin{cases} T\cdot\cos\alpha - mg = 0, \\ T\cdot\sin\alpha = q\cdot E. \end{cases}$$

Решение. Переписываем систему в виде

$$\begin{cases} T\cdot\sin\alpha = qE, \\ T\cdot\cos\alpha = mg. \end{cases}$$

Делим первое уравнение на второе

$$tg\alpha=\frac{qE}{mg},$$

откуда

$$q=\frac{mg}{E}\cdot tg\alpha.$$

6 Графики

6.1 Нахождение производной линейной функции

Если каждому значению некоторой величины *x* по определенному правилу, например записанному в виде формулы, противопоставляется величина *y*, то в математике говорят о функциональной зависимости между *x* и *y*:

$y = f(x)$, (8)

где *f* и есть то правило, в соответствии с которым для каждого *x* находится свое *y*. Такого рода зависимость лучше всего воспринимается, когда она представлена в виде графика на плоскости, смотри рисунок 12. Любой точке на графике, например точке M_1, соответствует пара значений x и y, для M_1 это x_1 и y_1, связанных между собой зависимостью (8). Точке M_2 соответствует пара y_2 и x_2 и т.д. По сути дела каждая пара x и y является координатой некой точки M на графике.

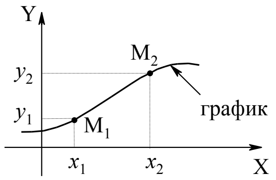


рисунок 12

Величина x называется аргументом функции, а величина y является значением функции. Функция может быть задана аналитически в виде уравнения (8), а может быть задана графически как на рисунке 12. (Кстати, функция y и аргумент x необязательно должны иметь такие обозначения. Эти буквы, могут быть произвольными, например $\varphi = f(\psi)$, где φ – функция, ψ – аргумент). По формуле (8) несложно построить график функции. Надо, например, выбрать достаточное количество, скажем 10, значений x равноотстоящих друг от друга по оси OX в интересующей нас области значений аргумента. Затем по формуле (8) для каждого x рассчитать y. Составить таблицу, на листе бумаги нарисовать оси, выбрать масштаб и восстановить по координатам x, y положение точек M. После этого плавной кривой, проведенной от руки, соединить точки M. Получится график, если потребуется его представить более точно, нужно просто увеличить количество пар x, y, используемых для построения. Обратная задача, т.е. нахождение по графику функции аналитической зависимости, является очень интересной. Эта одна из задач, которой постоянно приходится заниматься научным работникам и инженерам.

Правда, есть одна функция, по графику которой сразу можно сказать с аналитической зависимостью какого вида мы имеем дело. Это линейная функция

$$y = a + bx \tag{9}$$

где a и b константы. Действительно, прямую линию мы сможем отличить, посмотрев на нее, как говорят "на глаз" от любых других линий.

Рассмотрим приращение аргумента функции $\Delta x = x_2 - x_1$ (в таких обозначениях x_2 всегда больше x_1, $\Delta x > 0$) и определим соответствующее ему приращение функции (9) Δy. Для этого найдем значения y_2 и y_1

$$y_2 = a + bx_2,$$

$$y_1 = a + bx_1.$$

Вычтем из первого уравнения второе и получим

$$y_2 - y_1 = b \cdot (x_2 - x_1)\,,$$

т.е.

$$\Delta y = b \cdot \Delta x .$$

Возьмем отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = b ,$$

но b постоянная величина, значит и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ постоянная величина. Производной произвольной функции $y = f(x)$ называется величина

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

Обозначение производной $\dfrac{dy}{dx}$ читается как дэ игрек по дэ икс. Знак $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$, читается – предел при Δx стремящемся к нулю, обозначает предел к которому стремится величина, стоящая после этого знака ($\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$), когда приращение аргумента Δx становится очень малым. Для линейной функции предел брать нет необходимости, так как отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не зависит от величины Δx, поэтому

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = b .$$

Обратимся к графическому представлению линейной функции, смотри рисунок 13. Отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx на рисунке соответствует отношению катетов BC и AC.

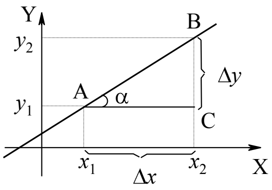


рисунок 13

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AC} = tg\alpha = \frac{dy}{dx} .$$

Это отношение является тангенсом угла наклона прямой к оси OX. Ясно, что оно не зависит от величины Δx. Если мы приблизим точку x_2 к x_1 уменьшив Δx, то получим треугольник подобный треугольнику ABC. Опять же для подобных треугольников значение $tg\alpha$ неизменно. Итак, для определения производной линейной функции по графику необходимо выбрать любую удобную пару точек x_2 и x_1, относящихся к интересующему нас линейному участку, определить по этим точкам точки y_2 и y_1 и рассчитать производную по формуле:

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Многие физические величины в физике определяются через производные.

1) Зависимость координаты тела x от времени t определяется функцией x(t). Скорость V_x является производной от x по t.

$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

(у этой функции аргументом является время t)

2) Зависимость скорости V_x от времени t определяется функцией V_x(t). Тогда ускорение – это производная

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}.$$

Далее будем писать сокращенно:

3) Φ(t), Φ – поток магнитного поля через контур.

$$E = -\frac{d\Phi}{dt},$$

E – ЭДС индукции.

4) I(t), I – ток.

$$E_c = -L \cdot \frac{d\mathrm{I}}{dt},$$

E_c – ЭДС самоиндукции.

5) A(V), A – работа, совершенная газом, V – объем газа.

$$p = \frac{dA}{d\mathrm{V}},$$

p – давление.

6) q(t), q – заряд протекающий через сечение проводника.

$$I = \frac{dq}{dt},$$

I – сила тока.

7) P_x(t), P_x – импульс тела.

$$F_x = \frac{dP_x}{dt}.$$

F_x – сила действующая на тело.

Этот список можно продолжать и дальше. Если по графику указанных выше функций мы видим , что они линейные, то не представляет труда определить величину, являющуюся производной от этой функции пользуясь тем, что для линейной функции

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Задача 11. Зависимость заряда, протекающего через поперечное сечение проводника, от времени показана на рисунке 14. Определить силу тока в интервале 0÷5 с.

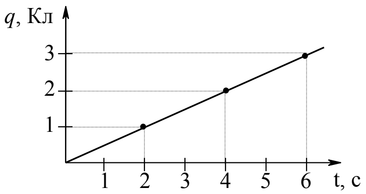


рисунок 14

Решение. По определению сила тока I для линейной функции q(t)

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Пусть t_1=2 с, t_2=4 с, тогда по графику q_1=1 Кл, q_2=2 Кл.

$$I = \frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ А}.$$

Производная I постоянна в интервале 0÷6 с, поэтому, если мы ее нашли в интервале 2÷4 с, то значит она нам известна и в интервале 0÷5 с (смотри условие).

Задача 12. По графику зависимости работы, совершаемой машиной, от времени, рисунок 15, определить мощность машины в интервале времен 2÷3 с.

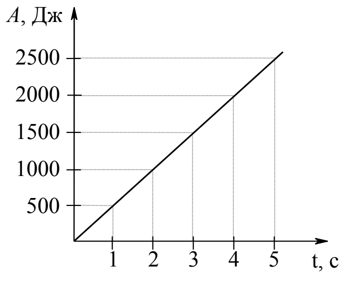


рисунок 15

Решение. Для линейной функции A(t) мощность P равна

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Производная P постоянна в интервале времен 0÷5 с, поэтому выберем t_1=0, t_2=5 с. По графику определяем A_1=0, A_2=2500 Дж. Следовательно:

$$P = \frac{2500 - 0}{5 - 0} = 500 \text{ Вт.}$$

6.2 Геометрическое интегрирование

Предположим, что зависимость $y = f(x)$ дана в виде графика, смотри рисунок 16. Для некоторого $\Delta x = x_2 - x_1$ можно поставить задачу об определении площади между осью OX и графиком функции. Справа и слева эта площадь ограничена перпендикулярами, восстановленными из точек x_1 и x_2 по отношению к оси OX. На рисунке 16 эта площадь заштрихована. В математике операция по нахождению таких площадей относятся к процедуре, именуемой интегрированием, а сама площадь называется интегралом $I(x_1;x_2)$.

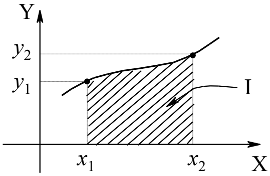


рисунок 16

Понятно, что площадь легко определяется по графику, если мы имеем дело с линейной функцией. Для линейной функции, смотри рисунок 17. Интеграл $I(x_1;x_2)$ равен площади трапеции ACDE. Его значение можно записать через x_1, x_2, y_1, y_2.

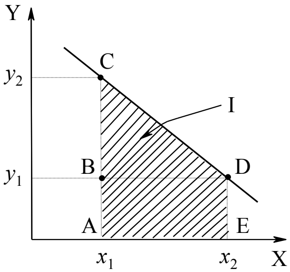


рисунок 17

$$I(x_1;x_2) = I = y_1 \cdot \Delta x + \frac{1}{2}\Delta y \cdot \Delta x = \frac{1}{2}(y_1+y_2) \cdot (x_2-x_1).$$

Многие задачи по физике решаются элементарно путем непосредственного определения площади на графике зависимости одной физической величины от другой.

Так ускорение

$$a_x = \frac{\Delta V_x}{\Delta t},$$

откуда

$$\Delta V_x = a_x \cdot \Delta t.$$

В правую часть последнего уравнения входят переменные a_x и t. Будем считать, что они связаны функциональной зависимостью $a_x(t)$. На рисунке 18 показан простой случай такой зависимости. График этой функции параллелен оси OX, так как мы полагаем ускорение

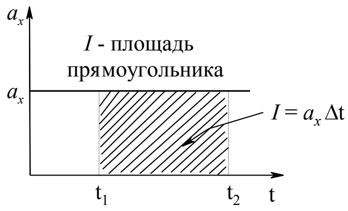


рисунок 18

постоянным. Но тогда приращение скорости ΔV_x есть интеграл, так как ΔV_x это площадь под зависимостью $a_x(t)$. Так как $\Delta V_x = V_{x2} - V_{x1}$, то если нам известна начальная скорость V_{x1}, определив по площади ΔV_x, мы найдем конечную скорость V_{x2}

$$V_{x2} = V_{x1} + \Delta V_x.$$

А как быть, если $a_x \neq \text{const}$? Можно догадаться (можно доказать строго), что и в этом случае ΔV_x, приращение скорости в интервале времен от t_1 до t_2, будет определяться площадью под зависимостью $a_x(t)$. Мы ограничимся только линейными зависимостями, т.к. только в этом случае интегралы считаются элементарно по графику функции.

Если нам известны определения тех или иных производных, то нетрудно от них перейти к тому, какая величина может быть определена путем интегрирования. Посмотрите определения производных в разделе 6.1. Если

1) $V_x = \dfrac{dx}{dt}$, то $dx = V_x \cdot dt$ ($\Delta x = V_x \cdot \Delta t$). $V_x dt$ ($V_x \Delta t$) – это некая малая площадь под зависимостью $V_x(t)$. Следовательно, изменение перемещения Δx определяется интегрированием функции $V_x(t)$.

2) $E = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, $d\Phi = -E \cdot dt$. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что $\Delta\Phi$ – изменение потока магнитного поля, определяется интегрированием функции $E(t)$.

3) $E_c = -L \cdot \dfrac{dI}{dt}$, $dI = -\dfrac{E_c}{L} \cdot dt$, ΔI – изменение тока определяется с точностью до множителя $1/L$ интегрированием функции $E_c(t)$.

4) $p = \dfrac{dA}{dV}$, $dA = p \cdot dV$. Работа газа ΔA определяется интегрированием функции $p(V)$. Очень важный вывод, широко использующийся в школьной термодинамике.

5) $I = \dfrac{dq}{dt}$, $dq = I \cdot dt$. Заряд Δq прошедший через через проводник определяется интегрированием $I(t)$.

6) $F_x = \dfrac{dp_x}{\Delta t}$, $dp_x = F_x \cdot dt$. Изменение импульса можно определить проинтегрировав зависимость $F_x(t)$.

Относительно определения скорости мы уже сделали вывод, что она определяется интегрированием $a_x(t)$.

Рассмотрим пару задач, которые решаются путем определения площадей на графиках, т.е. путем геометрического интегрирования.

Задача 13. Зависимость силы, действующей на тело, от времени приведена на рисунке 19. Определить импульс тела в момент $t_2 = 5$ с, если в начальный момент времени $t_1=0$ импульс тела был равен нулю.

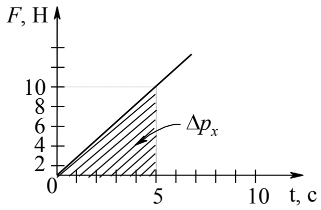


рисунок 19

Решение. Приращение импульса Δp_x за промежуток времени $\Delta t=t_2-t_1$ определяется площадью треугольника обозначенного на рисунке. Она равна

$$\Delta p_x = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25 \ H \cdot c.$$

Приращение импульса

$$\Delta p_x = p_{2x} - p_{1x},$$

т.к. начальное значение импульса по условию задачи $p_{1x}=0$, то импульс тела в момент $t_2=5$ с $p_{2x}=\Delta p_x=25$ Нс.

Задача 14. Определить заряд, прошедший через проводник за время от $t_1=2$ с до $t_2=6$ с, если сила тока в проводнике изменялась в соответствии с графиком на рисунке 20.

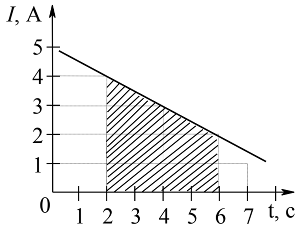


рисунок 20

Решение. Заряд Δq, прошедший через проводник определяется площадью трапеции, заштрихованной на рисунке 20. По графику определяем, что моменту времени $t_1=2$ с соответствует ток $I_1=4$ А, а моменту времени $t_2=6$ с – ток $I_2=2$ А. Тогда

$$\Delta q = \frac{(4+2)(6-2)}{2} = 12 \text{ Кл.}$$